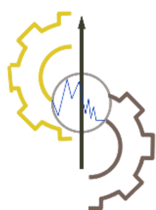
E-ISSN: 2717-4581 | P-ISSN: 2783-1345



Innovation Management and Operational Strategies

www.journal-imos.ir

Inov. Manage. Oper. Stra. Vol. 2, No. 3 (2021) 257–267.





Paper Type: Original Article

Portfolio Optimization and Random Matrix Theory in Stock Exchange

Mostafa Heidari Haratemeh*

Department of Economics and Management, Naragh Branch, Islamic Azad University, Naragh, Iran; heidarimu@yahoo.com.

Citation:



Heidari Haratemeh, M. (2021). Portfolio optimization and random matrix theory in stock exchange. *Innovation management and operational strategies,* 2(3), 257-267.

Received: 12/06/2021 Reviewed: 12/08/2021 Revised: 16/09/2021 Accept: 21/10/2021

Abstract

Purpose: This study aimed to optimize the stock portfolio based on stochastic matrix theory in the stock market and to answer whether the relevant information will exist using the Marčenko–Pastur distribution.

Methodology: The data of 31 shares in the Tehran Stock Exchange in 2016 - 2019 will be examined for cross-correlation between shares. So, there will be 749 end-of-day prices and 748 logarithms of returns. This research was done using the descriptive-correlation method and is of an applied research type.

Findings: The results showed: a) Observing the most extensive distribution of eigenvector components, it can be seen that there is a solid asymmetry to the left of the distribution, meaning that the market responds more to bad events than good events. b) By clearing the correlation matrix, the difference between the predicted and realized risk can be slightly reduced. In other words, the risk is reduced by identifying and removing non-valuable stocks from the portfolio portfolio. c) A stochastic stock matrix can significantly predict the realized return and risk of the market and, therefore, explain the risk of market information. d) The inverse participation ratio determines the stocks affecting the particular vectors, and the primary analysis of random matrices is based on adjusting this ratio using random matrix clearance.

Originality/Value: Unlike other portfolio formation methods determining the weight of each asset in the portfolio, stochastic matrix theory identifies unused stocks and removes them from the stock portfolio, thereby improving portfolio return and risk.

Keywords: Portfolio optimization, Random matrix theory, Cross-correlation, Inverse participation ratio, Eigenvectors.

https://doi.org/10.22105/imos.2021.289758.1109

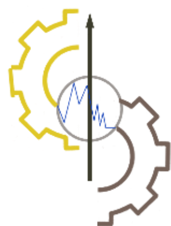


Corresponding Author: heidarimu@yahoo.com



http://dorl.net/dor/20.1001.1.27831345.1400.2.3.4.4





Innovation Management & Operational Strategies

مدیریت نوآوری و راهبردهای عملیاتی

دوره ۲، شماره ۳، (۱۴۰۰)، ۲۶۷-۲۵۷

www.journal-imos.ir





نوع مقاله: پژوهشی

بهینه‌سازی پرتفلیو و نظریه‌ی ماتریس تصادفی در بازار بورس

مصطفی حیدری هراتمه*

گروه اقتصاد و مدیریت، واحد نراق، دانشگاه آزاد اسلامی، نراق، ایران.

چکیده

هدف: هدف از انجام این تحقیق بهینه‌سازی سبد سهام بر مبنای نظریه ماتریس تصادفی در بورس اوراق بهادار بوده است جهت پاسخ به این پرسش که آیا اطلاعات مربوطه، با استفاده از توزیع مارچنکو - پاستور ($Marčenko - Pastur$) وجود خواهند داشت یا خیر؟

روش‌شناسی پژوهش: داده‌های ۳۱ سهم در بورس اوراق بهادار تهران در دوره زمانی ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۸ جهت همبستگی متقابل بین سهام‌ها موردبررسی قرار گرفته می‌شود؛ بنابراین ۷۴۹ قیمت پایانی روز و ۷۴۸ لگاریتم بازده وجود خواهد داشت. این تحقیق به روش توصیفی- همبستگی انجام‌شده و از نوع تحقیقات کاربردی است.

یافته‌ها: نتایج نشان داد: الف) با مشاهده‌ی بزرگ‌ترین توزیع اجزای بردار ویژه، مشاهده می‌شود که در سمت چپ توزیع یک عدم تقارن شدید وجود دارد که یعنی بازار بیشتر به وقایع بد تا وقایع خوب واکنش می‌دهد. ب) با پاک‌سازی ماتریس همبستگی می‌توان اختلاف بین ریسک پیش‌بینی‌شده و تحقق‌یافته را کمی کاهش داد. به عبارت بهتر با شناسایی و خارج کردن سهام غیر ارزشی از سبد سهام ریسک پرتفلیو کاهش می‌یابد. ج) ماتریس تصادفی سهام می‌تواند به‌طور معناداری بازده و ریسک محقق شده بازار را پیش‌بینی نماید و لذا توانایی زیادی در تبیین ریسک اطلاعات بازار دارد. د) نسبت معکوس مشارکت، سهام مؤثر بر بردارهای ویژه را تعیین می‌نماید و تحلیل اصلی ماتریس‌های تصادفی نیز بر پایه تعدیل این نسبت با استفاده از پاک‌سازی ماتریس تصادفی است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: نظریه ماتریس تصادفی برخلاف سایر روش‌های تشکیل پرتفلیو که به تعیین وزن هریک از دارایی‌ها در سبد سرمایه می‌پردازند، به شناسایی سهام غیرمفید و خارج نمودن آن‌ها از سبد سهام می‌پردازد و از این طریق منجر به بهبود بازده و ریسک سبد سهام می‌شود.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی پرتفلیو، نظریه‌ی ماتریس تصادفی، همبستگی متقابل، نسبت مشارکت معکوس، بردار ویژه.

۱- مقدمه

با توجه به اهمیت موضوع سنجش و اندازه‌گیری ریسک، کمی نمودن آن همواره موردتوجه بسیاری از محققین بوده است به‌طوری‌که برای اولین بار هری مارکوویتز در تئوری مدرن پرتفلیو به بیان کمی موضوع پرداخت .وی در تئوری خود تلاش نمود تا رفتار سرمایه‌گذاران را بر پایه دو پارامتر اساسی میانگین و واریانس بازده سرمایه‌گذاری تبیین نماید که در آن میانگین بازده به‌عنوان معیاری مطلوب و معرف بازده سرمایه‌گذاری و واریانس و انحراف معیار به‌عنوان یک معیار نامطلوب و معرف ریسک سرمایه‌گذاری معرفی گردیده است. یکی از اصول مارکویتز، توجه به دو عامل ریسک و بازده به‌طور هم‌زمان برای سرمایه‌گذار است. این در حالی است که قبل از مارکویتز، توجه به

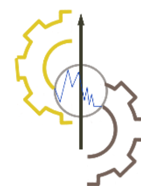
* نویسنده مسئول

heidarimu@yahoo.com

https://doi.org/10.22105/imos.2021.289758.1

http://dorl.net/dor/20.1001.1.27831345.1400.2.3.4.4





ریسک و بازده در ادبیات مالی به‌صورت تصادفی بود. این ایده که تصمیم‌گیری مالی، از تقابل میان ریسک و بازده به وجود می‌آید، به دو دلیل یک انقلاب در مدیریت سرمایه‌گذاری ایجاد کرد: اول اینکه فرض می‌کند که سرمایه‌گذار ارزیابی کمی از ریسک و بازده را از طریق توجه به بازده پرتفلیو و حرکت هم‌زمان بازده‌ها نسبت به هم انجام می‌دهد که این ایده اصلی در تنوع‌بخشی پرتفلیو است. دوم اینکه، فرآیند تصمیم‌گیری مالی را به‌عنوان یک مسئله بهینه‌سازی در نظر می‌گیرد، یعنی سرمایه‌گذار در میان انواع مختلف پرتفوهای در دسترس، پرتفلیویی را انتخاب می‌کند که کمترین واریانس را دارد. به دلیل جهانی‌سازی مالی، بازارها به‌طور فزاینده‌ای باهم مرتبط و پویا می‌شوند. لذا سرمایه‌گذاران باید از روش‌هایی استفاده کنند که به آن‌ها اجازه می‌دهند بازده مورد انتظارشان در این بازارها افزایش یابد و روش‌های متعددی برای این منظور وجود دارد که مشهورترینشان مدل مارکوویتز[1] (۱۹۵۲) است. این روش، ریسک بازده مورد انتظار را بر مبنای ضریب انحراف معیار و مقدار بازده مورد انتظار تخمین می‌زند. روش‌های دیگری نیز برای مدیریت و بهینه‌سازی پرتفلیو ایجاد شده‌اند. به نظر می‌رسد که همبستگی یک عنصر مهم برای مطالعه‌ی مدیریت پرتفلیو می‌باشد. روش‌های متعددی برای مطالعه‌ی همبستگی متقابل *cross-correlation* بین سری‌ها معرفی شده است (پدابنیک و استندلی[2]، ۲۰۰۸؛ ونگ و همکاران[3]، ۲۰۱۴). در این تحقیق، به روش دیگری که نظریه‌ی ماتریس تصادفی (*RMT = (random matrix theory* نام دارد پرداخته و جهت بررسی همبستگی متقابل در میان سهام‌های یک پرتفلیو استفاده می‌شود. این روش توسط ویگنر[4] (۱۹۹۳) در فیزیک هسته‌ای استفاده شده است. این روش را دایسون[5] (۱۹۶۲) برای توضیح سطوح انرژی هسته‌ی درهم‌تنیده استفاده کرده‌اند (پلرو و همکاران[6]، ۲۰۰۲). نظریه‌ی ماتریس تصادفی *RMT* برای تحلیل همبستگی در سطوح مالی و مخصوصاً برای بهبود مدیریت پرتفلیو استفاده شده است. با استفاده از نظریه‌ی ماتریس تصادفی *RTM*، پافکا و کوندور[7] (۲۰۰۴) دریافتند که تأثیر نویز در ماتریس‌های همبستگی که از سری‌های مالی تعیین می‌شوند می‌توانند آنقدر بزرگ باشند که فیلترسازی بر اساس نظریه‌ی ماتریس تصادفی به‌طور ویژه‌ای در این راستا تأثیرگذار باشد. لالوکس و همکاران[8] (۱۹۹۹، ۲۰۰۰) دریافتند که ماتریس همبستگی تجربی ریسک واقعی را بسیار کمتر از واقعیت تخمین می‌زند و سرمایه‌گذاری را بر اساس شاخص‌های ظاهراً کم ریسک افزایش می‌دهد. آن‌ها دریافتند که کمتر از ۶% از شاخص‌ها که مسئول ۲۶% از نوسانات کل هستند، ظاهراً حامل برخی اطلاعات‌اند. پافکا و کندور (۲۰۰۳) دریافتند ریسک "تحقق‌یافته" یک پروکسی مناسب برای ریسک "واقعی" در تمامی موارد دارای اهمیت کاربردی است و ریسک "پیش‌بینی‌شده" همواره کمتر است، درحالی‌که ریسک "تحقق‌یافته" بالاتر از ریسک "واقعی" است. با استفاده از یک رویکرد بر مبنای شبیه‌سازی، آن‌ها نشان دادند که مقادیر پارامترهایی که معمولاً در عمل مشاهده می‌گردند، تأثیر نویز بر ریسک پرتفلیوی بهینه می‌تواند به‌اندازه‌ای که انتظار می‌رود ضرورتاً بزرگ نباشد. ونگ و همکاران (۲۰۱۳) خواص آماری همبستگی متقابل در بازار بورس ایالات‌متحده را بررسی کردند. آن‌ها دریافتند که روش ضریب *DCCA* نتایج و خواص یکسانی با ضریب همبستگی پیرسون دارد؛ مثلاً خصوصیات بزرگ‌ترین مقادیر ویژه و بردار ویژه متناظر. دالی و همکاران[9] (۲۰۰۸) دریافتند که فیلترسازی بر مبنای *RMT* می‌تواند در بیشتر موارد ریسک تحقق‌یافته‌ی پرتفلیوهای با ریسک مینیمم را بهبود دهد. پلرو و همکاران (۲۰۰۲) همبستگی متقابل بین نوسانات قیمت سهام‌های مختلف را با استفاده از روش‌های نظریه‌ی ماتریس تصادفی تحلیل کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که بردار ویژه در حال انحراف برای ساخت پرتفلیوهای بهینه‌ای مناسبند که نسبت ریسک به بازده باثباتی دارند.

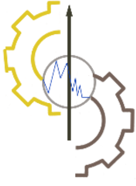
۲- چارچوب نظری و الگوی تحقیق

برای کمی سازی همبستگی‌ها، ابتدا تغییر قیمت (بازده) سهم $i=1...N$ در یک مقیاس زمانی Δt محاسبه می‌شود.

$$G_i(t) \equiv lnS_i(t+\Delta t) - lnS_i. \qquad (۱)$$

به‌طوری‌که $S_i(t)$ بیانگر قیمت سهم i است. ازآنجایی‌که سهم‌های مختلف سطوح متفاوت نوسان دارد (انحراف معیار)، بازده نرمال شده تعریف می‌شود:

[1] Markowitz
[2] Podobnik and Stanley
[3] Wang et al.
[4] Wigner
[5] Dyson
[6] Plerou et al.
[7] Pafka and Kondor
[8] Laloux et al.
[9] Daly et al.



$$g_i(t) \equiv \frac{G_i(t) - \langle G_i \rangle}{\sigma_i}. \quad (۲)$$

جایی که $\sigma_i \equiv \sqrt{\langle G_i^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2}$ انحراف معیار G_i و $\langle ... \rangle$ بیانگر میانگین زمانی در طول دوره‌ی موردمطالعه است. سپس المان‌های ماتریس C برابری زمانی همبستگی متقابل محاسبه می‌شود.

$$C_{ij} \equiv \langle g_i(t) g_j(t) \rangle. \quad (۳)$$

از طریق ساختاری، المان‌های C_{ij} محدود به دامنه‌ی $-1 \le C_{ij} \le 1$ هستند، به‌طوری‌که $C_{ij}=1$ متناظر است با روابط کامل و $C_{ij}=-1$ متناظر است با ضد همبستگی‌های کامل. $C_{ij}=0$ متناظر است با جفت سهام غیر همبسته.

پیچیدگی و دشواری‌های تحلیل اهمیت و معنای ضرایب همبستگی متقابل C_{ij} به چند دلیل است که عبارت‌اند از:

- *تغییرات شرایط بازار با زمان و همبستگی‌های بینابینی که میان هر دو جفت سهم وجود دارد ممکن است ثابت نباشد.*
- *طول متناهی سری‌های زمانی برای تخمین همبستگی متقابل نویز سنجش ''measurement noise'' را عرضه می‌کند.*

اگر N بازده با طول برابر با L وجود داشته باشد، پس ماتریس همبستگی متقابل C می‌تواند با C_{ij} محاسبه شود. در مورد موضوع موردبحث، $N=62$ و $L=1491$. با قطری سازی ماتریس C، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Cu_k = \lambda_k u_k. \quad (۴)$$

در تعریف ماتریسی، ماتریس همبستگی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$C = \frac{1}{L} G G^T. \quad (۵)$$

به‌طوری‌که G یک ماتریس $N*L$ با آرایه‌های $\{g_{im} \equiv g_i(m\Delta t); i=1,...,N;\ M=0,...,L-1\}$ و G^T بیانگر ترانهاده‌ی G است. لذا یک ماتریس همبستگی تصادفی به‌صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$R = \frac{1}{L} A A^T. \quad (۶)$$

به‌طوری‌که A یک ماتریس $N*L$ست شامل N سری زمانی L از آرایه‌های تصادفی a_{im} با میانگین صفر و واریانس واحد است که مشترک ناهمبسته هستند. خواص آماری ماتریس‌های تصادفی مانند R، معلوم است. (بلکویل و همکاران[1]، ۲۰۱۹؛ سنگوپتا و میترا[2]، ۱۹۹۹). مخصوصاً در حد $N \to \infty$ ، $L \to \infty$ به طریقی که $Q \equiv L/N\ (>1)$ ثابت است، تابع چگالی احتمال $P_{rm}(\lambda)$ از مقادیر ویژه λ ماتریس همبستگی تصادفی R، به این شکل به دست می‌آید:

$$P_{rm}(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda -)}}{\lambda}. \quad (۷)$$

زیرا λ بین مرزهای $\lambda_- \le \lambda_i \le \lambda_+$ است؛ به‌طوری‌که λ_- و λ_+، مینیمم و ماکزیمم مقادیر ویژه R هستند؛ که به این شکل حاصل می‌شود:

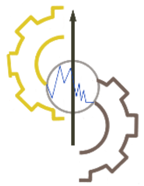
---

[1] Blackwell et al.

[2] Sengupta and Mitra

$$\lambda_{\pm} = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{Q} \pm 2\sqrt{\frac{1}{Q}}\right). \qquad (۸)$$

به‌طوری‌که σ^2 برابر با میانگین مقادیر ویژه ماتریس همبستگی ست (بوچاود و پاترز[1]، ۲۰۰۳).



توزیع عناصر بردار ویژه. توزیع المان‌های $\{u_k(l)|l = 1, 2,..., N\}$ برای یک بردار ویژه u_k از یک ماتریس همبستگی تصادفی R، باید فقط از توزیع نرمال استاندارد با میانگین صفر و واریانس واحد پیروی کند (پلرو و همکاران، ۲۰۰۲).

$$P_R(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{u^2}{2}\right). \qquad (۹)$$

نسبت مشارکت معکوس. برای ارزیابی تعداد آرایه‌هایی که به‌طور معناداری در هر بردار ویژه نقش دارند، از نسبت مشارکت معکوس استفاده می‌شود (پلرو و همکاران، ۲۰۰۲؛ پلرو و همکاران، ۱۹۹۹؛ گر و همکاران[2]، ۱۹۹۸). این نسبت همچنین بیانگر درجه‌ی انحراف توزیع بردار ویژه از نتایج *RMT* است و بین یک بردار ویژه با اجزای تقریباً مساوی و دیگری با تعداد کمی از اجزای بزرگ تمایز قائل می‌شود.

IPR بردار ویژه u^k به این شکل تعریف می‌شود:

$$I^k \equiv \sum_{l=1}^{N} \left[u_l^k\right]^4. \qquad (۱۰)$$

به‌طوری‌که u_k^l , $l = 1 , ... , 1000$ المان‌های شاخص u^k هستند. معنای فیزیکی I^k را می‌توان تنها با دو حالت حد نشان داد:

۱. برداری با المان‌های برابر $u_l^k \equiv 1/\sqrt{N}$ و دارای $I^k=1/N$ می‌باشد.
۲. برداری با یک المان $u_l^k = 1$ و باقیمانده‌ی صفر دارای $I^k = 1$.

لذا *IPR* تعدادی از المان‌های بردار ویژه را کمی می‌کند که نقش مهمی دارند (پلرو و همکاران، ۲۰۰۲؛ فیدورا و میرلین[3]، ۱۹۹۲؛ لی و راماکریشنان[4]، ۱۹۸۵؛ فیدورا و میرلین، ۱۹۹۳؛ فیدورا و میرلین، ۱۹۹۴؛ میرلین و فیدورا[5]، ۱۹۹۳؛ ویگنر، ۱۹۹۳).

اگر انحراف‌ها در لبه‌ی طیف مقادیر ویژه خیلی بزرگ‌تر از میانگین *IPR (I)* باشند، بیانگر این است که بردارها محلی شده‌اند (نظریه‌ی محلی‌سازی)، (فیدورا و میرلین، ۱۹۹۲؛ لی و راماکریشنان، ۱۹۸۵؛ فیدورا و میرلین، ۱۹۹۳؛ فیدورا و میرلین، ۱۹۹۴؛ میرلین و فیدورا، ۱۹۹۳؛ ویگنر، ۱۹۹۳). در چارچوب تئوری محلی‌سازی، می‌توان «ماتریس‌های باند تصادفی» را مکرر یافت (فیدورا و میرلین، ۱۹۹۲؛ لی و راماکریشنان، ۱۹۸۵؛ فیدورا و میرلین، ۱۹۹۳؛ فیدورا و میرلین، ۱۹۹۴؛ میرلین و فیدورا، ۱۹۹۳؛ ویگنر، ۱۹۹۳).

۳- روش‌شناسی تحقیق

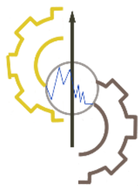
تحقیق حاضر از منظر ماهیت و روش اجرا، توصیفی بوده و به لحاظ رویکرد استدلالی، استقرایی محسوب می‌گردد. همچنین، از جهت استفاده از نتایج، تحقیقی کاربردی است. جامعه آماری پژوهش شامل کلیه شرکت‌های پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار تهران که از ابتدای سال ۱۳۹۵ در بورس اوراق بهادار پذیرفته‌شده و تا پایان سال ۱۳۹۸ در بورس اوراق بهادار باقی مانده‌اند، می‌باشد. داده‌های استفاده شده در این تحقیق شامل ۳۱ سهام در دوره زمانی ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۸ در بازار بورس تهران می‌باشد؛ بنابراین ۷۴۹ قیمت پایانی روز و ۷۴۸

حیدری هراتمه/ مدیریت نوآوری و راهبردهای عملیاتی، دوره ۲، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۰، صفحه: ۲۶۷-۲۵۷

---

[1] Bouchaud and Potters
[2] Guhr et al.
[3] Fyodorov and Mirlin
[4] Lee and Ramakrishnan
[5] Mirlin and Fyodorov

لگاریتم بازده وجود خواهد داشت. قیمت پایانی روز t با P_t نشان داده می‌شود. لگاریتم طبیعی بازده برای شاخص به این شکل تعیین می‌شود:

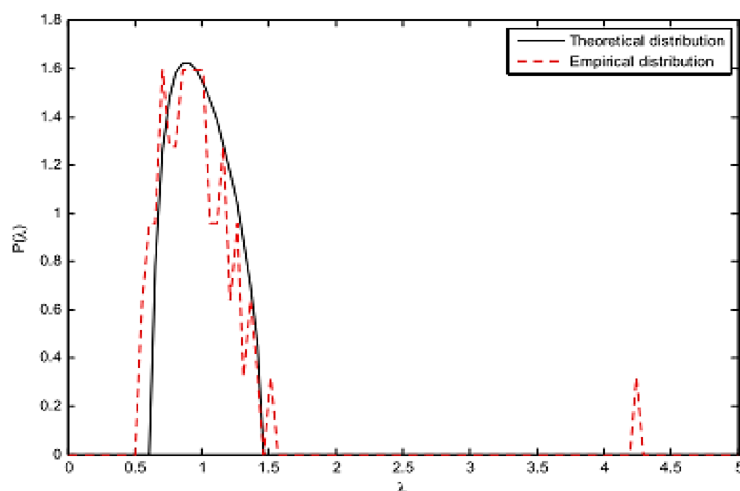


$$r_t = ln\left(\frac{p_t + 1}{p_t}\right). \qquad (۱۱)$$

پس میانگین و انحراف معیار بازده هر یک از سهام‌ها قبل از تثبیت فرایند انتخاب پرتفلیو محاسبه و تعیین می‌شود. تجزیه‌وتحلیل داده‌های به‌دست‌آمده از تحقیق حاضر شامل دو بخش می‌باشد: الف) آمار توصیفی: این بخش شامل شاخص‌های مرکزی و پراکندگی هریک از متغیرهای تحقیق در دوره زمانی موردمطالعه است که شامل شاخص‌هایی چون: میانگین، انحراف معیار، ضریب چولگی و کشیدگی می باشد ب) آمار استنباطی: در بخش آمار استنباطی با استفاده از تحلیل ماتریس‌های همبستگی و به‌کارگیری ابزار جبر خطی شامل مفاهیم مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس‌ها به پیاده‌سازی الگوی تحقیق در راستای تشکیل پرتفوی پرداخته می‌شود. به‌منظور تشکیل پرتفوی با استفاده از تئوری ماتریس تصادفی، مقادیر نسبت معکوس مشارکت در برابر رتبه آن‌ها رسم می‌گردند و مقادیری که بیشتر از میانگین نسبت معکوس مشارکت باشند، نشان‌دهنده سهامی هستند که از تئوری ماتریس تصادفی تبعیت نمی‌کنند و می‌بایست در پرتفوی وجود نداشته باشند. به‌منظور تجزیه‌وتحلیل داده‌ها از نرم‌افزار *Eviews* استفاده می‌شود.

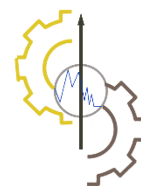
۴- نتایج تحقیق

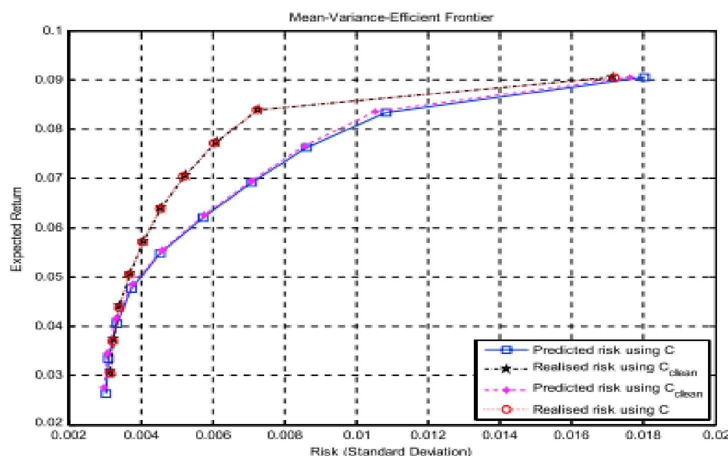
توزیع تجربی و توزیع نظری مارچنکو - پاستور شاخص‌ها در **شکل ۱** نشان داده شده است. بازه‌ی شاخص‌های $[\lambda_-, \lambda_+]$ پیش‌بینی‌شده برای نظریه‌ی ماتریس تصادفی مشاهده می‌شود. سپس، این مقادیر انحرافات می‌توانند شامل اطلاعات مناسبی در بازار باشند و المان‌های نویزدار نیستند. مشخص شد که شاخص‌های نظری (ماکزیمم و مینیمم) λ_{max} = ۱/ ۴۵ و λ_{min} = ۰/۶۳۴ را دربر می‌گیرد. N = ۳۱ کمیت وجود خواهد داشت و L=۷۴۸ بازده روزانه برای هر کمیت. لذا مقدار Q برابر است با ۲۴/۱۲۹ =L/N. تحلیل نتایج، نشان می‌دهد که هفت شاخص از بازه‌ی پیش‌بینی *RMT* انحراف دارند. این انحراف بیانگر ۱۳% از کل شاخص‌هاست. لالوکس و همکاران (۲۰۰۰) دریافتند که کمتر از ۶% از شاخص‌هایی می‌توانند شامل اطلاعات به در بخور باشند. در این ارتباط، درصد خیلی مهم است و لذا تنها ۸۷% شاخص‌ها با نظریه‌ی توزیع ماتریس تصادفی در ارتباطند. علاوه بر این، حداکثر مقدار تجربی مقادیر ویژه (λ_1 = ۴/۲۵) از چیزی که توسط نظریه‌ی ماتریس تصادفی ۱/ ۴۵ = λ_{max} پیش‌بینی‌شده، فراتر می‌رود؛ بنابراین تحلیل اطلاعات مفید می‌تواند در مدیریت پرتفلیو مناسب و کارآمد باشد.



شکل ۱- توزیع نظری (مارچنکو - پاستور) و عملی مقادیر ویژه.

Figure 1- Theoretical (Marčenko–Pastur) and empirical distributions of eigenvalues.





شکل ۲- ریسک پیش‌بینی‌شده و ریسک تحقق‌یافته با استفاده از ماتریس همبستگی و ماتریس پاک‌سازی شده‌ی همبستگی.

Figure 2- Predicted risk and realized risk using the correlation matrix and the cleaned correlation matrix.

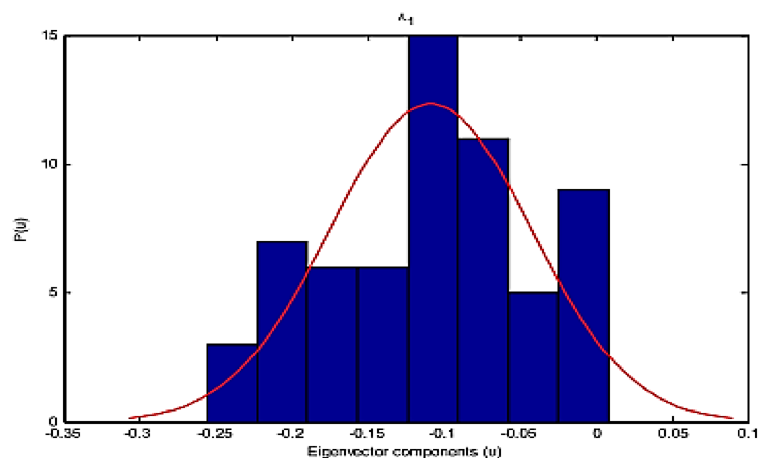
شکل ۲ شکاف موجود بین ریسک پیش‌بینی و ریسک تحقق‌یافته را نشان می‌دهد وقتی ماتریس همبستگی پاک‌سازی می‌شود این شکاف کمی کاسته شده است؛ بنابراین، روش پاک‌سازی ماتریس همبستگی از عناصر نویزدار با کاهش اندکی اختلاف بین مرز کارآمد پیش‌بینی‌شده و مرز تحقق‌یافته، کیفیت پیش‌بینی را به میزان کمی بهبود می‌بخشد؛ به‌عبارت‌دیگر هرچه در جهت محور افقی (ریسک) حرکت شود فاصله ریسک پیش‌بینی‌شده و تحقق‌یافته (دو منحنی به هم نزدیک‌تر می‌شوند) کاسته می‌شود.

۴-۱- پاک‌سازی ماتریس همبستگی

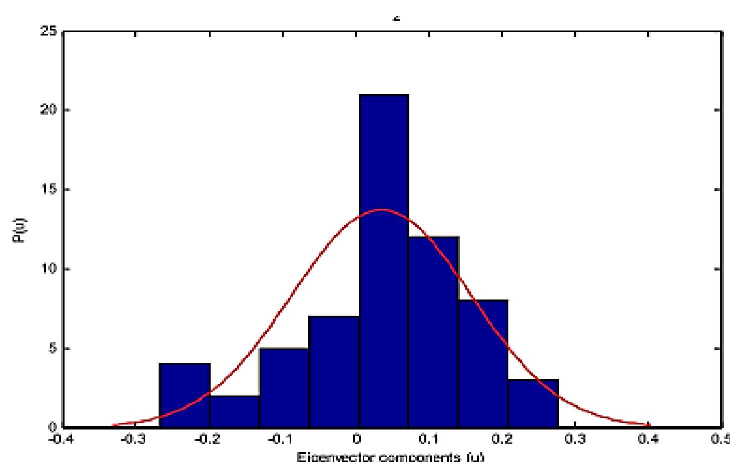
ازآنجاکه برخی از تغییرات بازده سهام صرفاً جنبه اخلال در روند تغییرات دارند و اثرات لحظه‌ای ناپایدار بر بازده سهام برجای می‌گذارند، می‌توانند ماتریس همبستگی سهام شرکت‌ها را نیز دستخوش تغییر سازند. لذا به‌منظور پاک‌سازی ماتریس تصادفی تحقیق از این اجزاء اخلال، روند پاک‌سازی ماتریس انجام گردیده است. برای مشاهده تأثیر المان‌های نویزدار در نظریه‌ی ماتریس تصادفی، ماتریس همبستگی از المان‌های نویزدار پاک می‌شود. در این ارتباط، سری‌ها به دو دوره‌ی یکسان تقسیم می‌شود. یکی بیانگر "ریسک پیش‌بینی‌شده " و دومی بیانگر "ریسک تحقق‌یافته " خواهد بود. ابتدا مقادیر ویژه نویزدار از آن‌هایی که بدون نویز هستند جدا می‌شود. این آخرین مورد خارج از حد پیش‌بینی *RMT* واقع شده است. سپس المان‌های انحرافی درون $[\lambda_-, \lambda_+]$ نگه داشته می‌شود و الباقی با میانگین جایگزین می‌شود تا همان ترتیب ماتریس حفظ شود. ماتریسی که از این ارائه‌ها شکل می‌گیرد. بااین‌وجود می‌توان ماتریس همبستگی جدیدی از المان‌های نویزدار پاک‌سازی شده است ساخته می‌شود.

۴-۲- توزیع اجزای بردار ویژه

برای تحلیل توزیع بردار ویژه، توزیع اجزای بردار ویژه که در مرزهای پیش‌بینی (λ_-, λ_+) *RMT* قرار دارند با آن‌هایی که در این حدود قرار ندارند مقایسه می‌شود. در **شکل ۳** توزیع نرمال بزرگ‌ترین اجزای بردار ویژه (λ_1) بیانگر یک میانگین منفی است که با صفر متفاوت است. لذا، در سمت چپ یک توزیع نامتقارن وجود خواهد داشت.



شکل ۳- توزیع اجزای بردار ویژه برای بزرگ‌ترین مقادیر ویژه (λ_1).
Figure 3- Distribution of eigenvector components for the largest eigenvalue (λ_1).

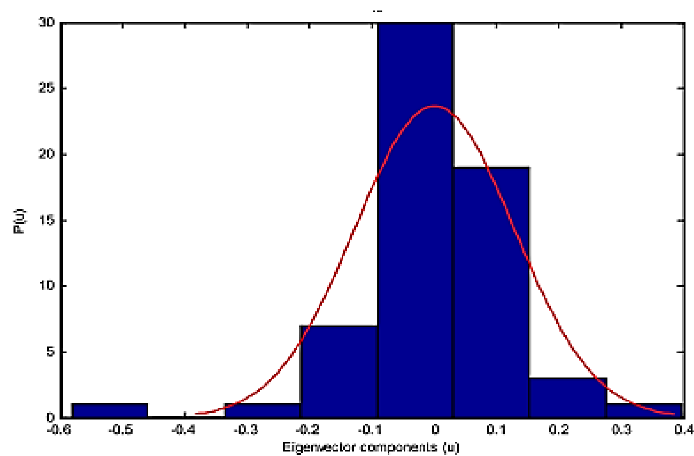


شکل ۴- توزیع اجزای بردار ویژه یک مقدار ویژه (λ_2) خارج از بازه‌ی پیش‌بینی RMT.
Figure 4- Distribution of eigenvector components of an eigenvalue (λ2) deviating from the interval predictions of RMT.

شکل ۴ توزیع اجزای بردار ویژه از یک مقدار ویژه (λ_{12}) را نشان می‌دهد که خارج از بازه پیش‌بینی *RMT* می‌باشد؛ بنابراین مشاهده می‌شود که سمت راست این توزیع کمی نامتقارن و داده‌ها فیت نیستند. برای مورد توزیع اجزای بردار ویژه برای مقدار ویژه λ_{12} (**شکل ۵**) که از بازه‌ی پیش‌بینی *RMT* انحراف دارد مشاهده می‌شود که توزیع در مرکز متمرکز شده است. برخی مشاهدات با قانون توزیع نرمال فیت نیستند؛ همان‌طور که در سمت چپ دیده می‌شود. علاوه بر این، مقادیر *P(u)* گویی بالا هستند؛ اما توزیع اجزای بردار ویژه یک مقدار ویژه (λ_{50}) که در بازه‌ی پیش‌بینی *RMT* آمده است، گویی به‌خوبی با توزیع نرمال (**شکل ۶**) تطابق یافته است. لذا این توزیع دارای میانگین صفر و انحراف استاندارد نسبتاً ثابت دارد.

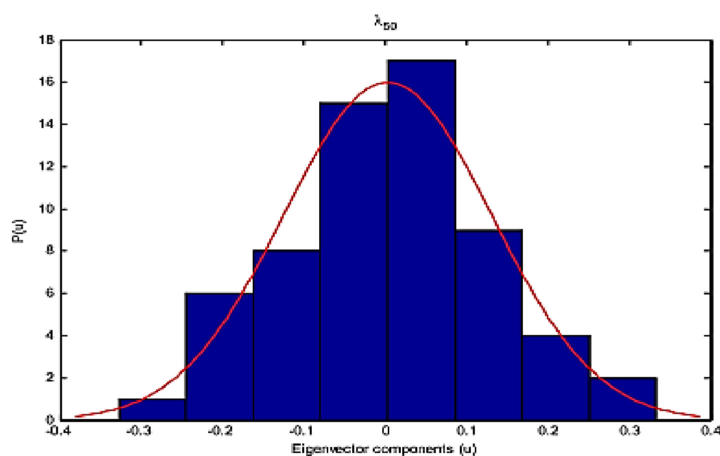
در مقایسه با سایر نتایج مربوط به مقادیر ویژه دارای انحراف از بازه‌ی پیش‌بینی‌های *RMT*، مقادیر *P(u)* آن‌قدری بالا نیستند و برازش توزیع نرمال برای اجزای بردار ویژه λ_{50} از λ_1، λ_2 و λ_{12} بهترین است.

علاوه بر این، یادآوری می‌شود که عدم تقارن برای λ_1 تیزتر از λ_{50} است. با در نظر گرفتن این واقعیت که λ_1 می‌تواند بیانگر بازار باشد، می‌توان گفت که بازار بیشتر به تغییرات منفی پاسخ می‌دهد تا تغییرات مثبت که در ادامه در **شکل ۷** و **۸** نشان داده شده است.



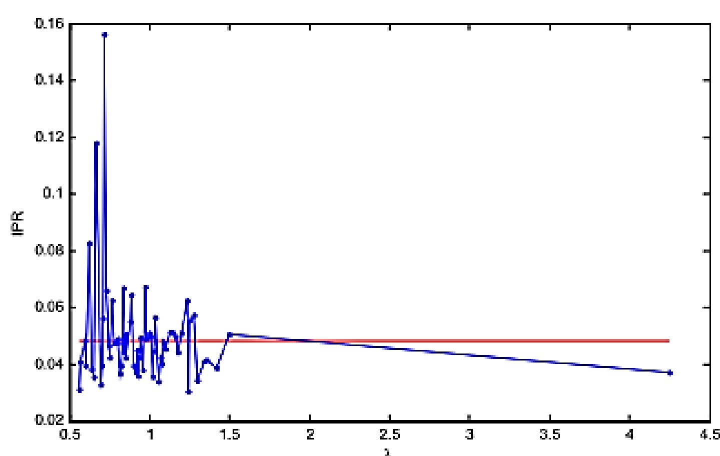
شکل ۵- توزیع اجزای بردار ویژه از یک مقدار ویژه (λ12) خارج از بازه پیش‌بینی RMT.

Figure 5- Distribution of eigenvector components of an eigenvalue (λ12) deviating from the interval predictions of RMT.



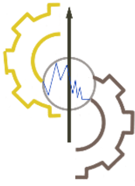
شکل ۶- توزیع اجرای بردار ویژه یک مقدار ویژه (λ50) در بازه‌ی پیش‌بینی RMT.

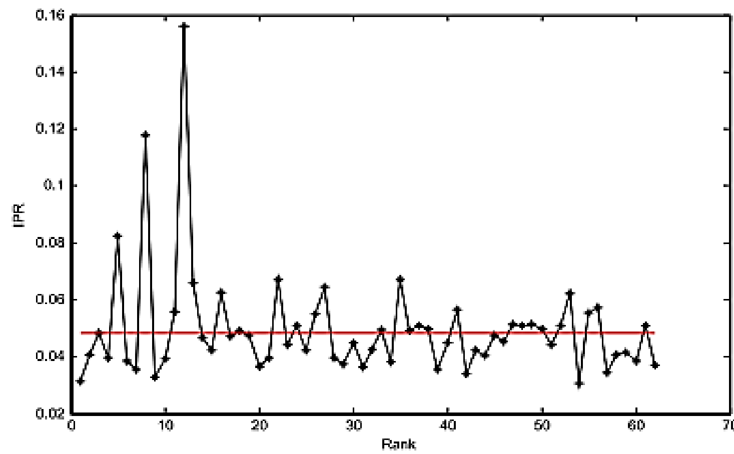
Figure 6- Distribution of eigenvector components of an eigenvalue (λ50) that is included in the interval predictions of RMT.



شکل ۷- نسبت مشارکت معکوس و شاخص‌ها.

Figure 7- Inverse participation ratio and eigenvalues.





شکل ۸- نسبت مشارکت معکوس و رتبه آن‌ها.

Figure 8- Inverse participation ratio and their rank.

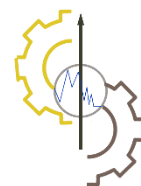
۳-۴- نسبت مشارکت معکوس

از نسبت مشارکت معکوس برای بررسی المان‌هایی استفاده می‌شود که به میزان زیادی در بردار ویژه تأثیرگذارند. این نسبت، درجه‌ی انحراف آن‌ها را می‌سنجد. با تحلیل **شکل ۷**، انحراف چشمگیری در نسبت مشارکت معکوس (*IPR*) برای اولین مقدار ویژه مشاهده می‌شود؛ بنابراین، انحراف از بزرگ‌ترین مقدار نسبت به کوچک‌ترین بیش از ۵ برابر است. این یعنی بردار ویژه محلی شده‌اند. خط قرمز سطح نویز را نشان می‌دهد که برابر با میانگین *IPR* است. در این ارتباط میانگین *IPR* برابر با $\langle I\rangle \approx 3/N$ در نظر گرفته می‌شود. وقتی مقادیر $IPR\ I^k$ به‌طوری تخمین زده می‌شوند که نسبت به میانگین $\langle I\rangle$ خیلی بالاتر هستند، این بدین معناست که تنها برخی از کمپانی‌ها در شاخص‌ها نقش دارند. در **شکل ۸** مشاهده می‌شود که مقادیر *IPR* هنوز به سطح نویز نزدیک هستند؛ به‌جز انحرافات مهمی که برای اولین عناصر مشاهده شده است. نهایتاً اینکه نسبت معکوس مشارکت، سهام مؤثر بر بردارهای ویژه را تعیین می‌نماید و تحلیل اصلی ماتریس‌های تصادفی نیز بر پایه تعدیل این نسبت با استفاده از پاک‌سازی ماتریس تصادفی است. لذا هر بردار ویژه دارای یک نسبت معکوس مشارکت است که مقادیر کوچک‌تر برای این نسبت نشان از مطلوبیت بیشتر اطلاعات آن بردار در تشکیل پرتفلیو دارد. اگرچه نقش نهایی نسبت‌های معکوس مشارکت پس از پاک‌سازی ماتریس همبستگی قابل تعیین است.

۵- بحث و بررسی تحقیق

بررسی‌های انجام‌شده در تحلیل داده‌ها نشان از آن داشت که نظریه ماتریس تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران به‌طور معناداری قابلیت کنترل و تبیین ریسک در بازار را دارد. ازآنجاکه کل ریسک ایجادشده در این تحلیل بر پایه اطلاعات بازده سهام شرکت‌ها بوده، می‌توان نتیجه گرفت که ریسک اطلاعات موجود در بازده سهام شرکت‌ها در تئوری ماتریس تصادفی به‌طور معناداری قابل تبیین و توجیه بوده و این روش بازده و ریسکی را در راستای مقدار تحقق‌یافته آن در بازار سرمایه پیش‌بینی می‌نماید. در توضیح مزیت این روش نسبت به روش‌های موجود باید اشاره کرد که در روش‌های بهینه‌سازی پرتفلیو توجهی به‌اندازه همبستگی سهام پرتفلیو با یکدیگر نمی‌شود بلکه بازده پرتفلیو از طریق میانگین وزنی بازده سهام شرکت‌ها در سبد سهام تعیین می‌گردد و لذا تعیین اوزان بهینه ارتباطات زوجی بین سهام شرکت‌ها را لحاظ نمی‌کند درحالی‌که در نظریه ماتریس تصادفی می‌توان با استناد به روابط و همبستگی‌های ضمنی بین سهام شرکت‌ها، سهام غیر ارزشی و غیرمفید را شناسایی نموده و پرتفلیو را بر پایه سایر دارایی‌های پرتفلیو مدیریت نمود. لذا این روش یک روش نهایی برای تشکیل پرتفلیو نبوده و تنها مقدمه‌ای برای تشکیل پرتفلیو است که از همان ابتدا، به بهینه‌سازی پرتفلیو از طریق حذف سهام غیر ارزشی می‌پردازد. لذا تشکیل پرتفلیو بر پایه این روش تنها منجر به شناسایی سهام مطلوب خواهد شد و وزن هریک از دارایی‌ها در سبد سهام را تعیین نمی‌نماید که از محدودیت‌های انجام این روش بشمار می‌آید. نظریه‌ی ماتریس تصادفی (*RMT*) این امکان را می‌دهد که ساختار همبستگی سهام‌های یک پرتفلیو با جزئیات موردبررسی و تحلیل قرار گیرد. در این راستا، توزیع مارچنکو – پاستور، بازه‌ی نظری پیش‌بینی *RMT* را برای مشاهده‌ی اینکه مقادیر ویژه با توزیع تجربی‌شان انحراف دارند یا خیر، ارائه می‌کند. با مشاهده‌ی بزرگ‌ترین توزیع اجزای بردار ویژه، مشاهده می‌شود که در سمت چپ توزیع یک عدم تقارن شدید وجود دارد که یعنی بازار بیشتر به وقایع بد تا وقایع خوب واکنش می‌دهد؛ بنابراین باید این مهم را در مدیریت پرتفلیوها زمانی که پرتفلیو تشکیل می‌دهند در نظر بگیرند. همچنین، می‌توان با پاک‌سازی

ماتریس همبستگی فاصله بین ریسک پیش‌بینی‌شده و تحقق‌یافته را کمی کاهش داد. این فرایند برای افراد فعال می‌تواند ازاین‌جهت مفید باشد که خطای پیش‌بینی خودشان را کاهش دهند. همچنین، تجزیه‌وتحلیل اجزای توزیع بردارهای ویژه از مقادیر ویژه نشان داد که سازگاری توزیع نرمال برای عناصری که خارج از محدوده پیش‌بینی‌های *RMT* نیستند، بسیار قابل‌استفاده نیست که تائید می‌کند آن‌ها المان‌های نویزدار نیستند. تحلیل توزیع اجزای بردار ویژه نشان داد که برازش توزیع نرمال خیلی برای المان‌هایی که بیرون از بازه‌ی پیش‌بینی *RMT* هستند مناسب نیست؛ که تائید می‌کند آن‌ها المان‌های نویزدار نیستند. سرانجام، نسبت مشارکت معکوس، دقت بیشتری به درجه‌ی انحراف المان‌ها دارد و می‌توان با آن‌ها ساختار همبستگی پرتفلیو را بهتر درک نمود. نهایتاً اینکه که نظریه ماتریس تصادفی با شناسایی و خارج کردن سهام غیر ارزشی از سبد سهام منجر به بهبود بازده و ریسک سبد می‌گردد. همچنین ماتریس تصادفی سهام می‌تواند به‌طور معناداری بازده و ریسک محقق شده بازار را پیش‌بینی نماید و لذا توانایی زیادی در تبیین ریسک اطلاعات بازار دارد. درنهایت موضوعاتی همچون: سنجش کارایی بهینه‌سازی مبتنی بر ریسک نامطلوب و پتانسیل مطلوب و متغیرهای روان‌شناختی در تشکیل پرتفوی با سایر مدل‌های تشکیل پرتفوی مانند الگوریتم ژنتیک، تئوری آشوب و شبکه عصبی و استفاده از سایر مدل‌های ارزش در معرض خطر به‌عنوان ریسک نامطلوب در تشکیل پرتفوی مبتنی بر ریسک نامطلوب و پتانسیل مطلوب و متغیرهای روان‌شناختی جهت تحقیقات آتی و همچنین مواردی همچون استفاده از مدل موردتحقیق در تبیین سبدهای قابل تشکیل برای سرمایه‌گذاران توسط شرکت‌های سبد گردان و استفاده از مدل برای استخراج مقادیر متغیرهای روان‌شناختی سرمایه‌گذاران توسط شرکت‌های مشاور سرمایه‌گذاری و مشاوره بر اساس آن‌ها به‌عنوان پیشنهادهای کاربردی ارائه می‌گردد.



حیدری هراتمه / مدیریت نوآوری و راهبردهای عملیاتی، دوره ۲، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۰، صفحه: ۲۶۷-۲۵۷

منابع

Blackwell, K., Borade, N., VI, C. D., Luntzlara, N., Ma, R., Miller, S. J., ... & Xu, W. (2019). Distribution of eigenvalues of random real symmetric block matrices. arXiv preprint arXiv:1908.03834

Bouchaud, J. P., & Potters, M. (2003). *Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management*. Cambridge University Press.

Daly, J., Crane, M., & Ruskin, H. J. (2008). Random matrix theory filters in portfolio optimisation: a stability and risk assessment. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, *387*(16-17), 4248-4260.

Dyson, F. J. (1962). Statistical theory of the energy levels of complex systems. I. *Journal of mathematical physics*, *3*(1), 140-156.

Fyodorov, Y. V., & Mirlin, A. D. (1992). Analytical derivation of the scaling law for the inverse participation ratio in quasi-one-dimensional disordered systems. *Physical review letters*, *69*(7), 1093. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1093

Fyodorov, Y. V., & Mirlin, A. D. (1993). Level-to-level fluctuations of the inverse participation ratio in finite quasi 1D disordered systems. *Physical review letters*, *71*(3), 412. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.412

Fyodorov, Y. V., & Mirlin, A. D. (1994). Statistical properties of eigenfunctions of random quasi 1d one-particle Hamiltonians. *International journal of modern physics B*, *8*(27), 3795-3842.

Guhr, T., Müller–Groeling, A., & Weidenmüller, H. A. (1998). Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics reports*, *299*(4-6), 189-425.

Laloux, L., Cizeau, P., Bouchaud, J. P., & Potters, M. (1999). Noise dressing of financial correlation matrices. *Physical review letters*, *83*(7), 1467. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.1467

Laloux, L., Cizeau, P., Potters, M., & Bouchaud, J. P. (2000). Random matrix theory and financial correlations. *International journal of theoretical and applied finance*, *3*(03), 391-397.

Lee, P. A., & Ramakrishnan, T. V. (1985). Disordered electronic systems. *Reviews of Modern Physics*, *57*(2), 287. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.57.287

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, *7*(1), 77–91. https://doi.org/10.2307/2975974

Mirlin, A. D., & Fyodorov, Y. V. (1993). The statistics of eigenvector components of random band matrices: analytical results. *Journal of physics A: mathematical and general*, *26*(12), L551. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/26/12/012/meta

Pafka, S., & Kondor, I. (2003). Noisy covariance matrices and portfolio optimization II. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, *319*, 487-494.

Pafka, S., & Kondor, I. (2004). Estimated correlation matrices and portfolio optimization. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, *343*, 623-634.

Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Amaral, L. A. N., & Stanley, H. E. (1999). Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series. *Physical review letters*, *83*(7), 1471. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.1471

Plerou, V., Gopikrishnan, P., Rosenow, B., Amaral, L. A. N., Guhr, T., & Stanley, H. E. (2002). Random matrix approach to cross correlations in financial data. *Physical review E*, *65*(6), 066126. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.066126

Podobnik, B., & Stanley, H. E. (2008). Detrended cross-correlation analysis: a new method for analyzing two nonstationary time series. *Physical review letters*, *100*(8), 084102. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.084102

Sengupta, A. M., & Mitra, P. P. (1999). Distributions of singular values for some random matrices. *Physical review E*, *60*(3), 3389. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.60.3389

Wang, G. J., Xie, C., Chen, S., Yang, J. J., & Yang, M. Y. (2013). Random matrix theory analysis of cross-correlations in the US stock market: evidence from Pearson's correlation coefficient and detrended cross-correlation coefficient. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, *392*(17), 3715-3730.

Wang, G. J., Xie, C., He, L. Y., & Chen, S. (2014). Detrended minimum-variance hedge ratio: a new method for hedge ratio at different time scales. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, *405*, 70-79.

Wigner, E. P. (1993). Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions i. In *The collected works of eugene paul wigner* (pp. 524-540). Springer, Berlin, Heidelberg.

Wigner, E. P. (1993). On a class of analytic functions from the quantum theory of collisions. In *The collected works of eugene paul wigner* (pp. 409-440). Springer, Berlin, Heidelberg.

